4.3.3. Modelo de asignación pura.

Considere un caso especial del problema de transporte en que se cumple: m = n; es decir, el número de orígenes es igual a los destinos; además a_i= b j =1.

El modelo así definido es asignación pura, se refiere a la acción de asignar uno a uno; esto es, en forma biunívoca. Se entiende asignar n candidatos a n acciones requeridas, conociendo la medida de desempeño, que puede ser costo, beneficio o rendimiento. El problema consiste en asignar de forma idónea para conseguir el mejor resultado general. Por ejemplo, la asignación de personas a operar máquinas, para las cuales se tiene la información de la capacidad individual al trabajar con ellas, se acepta como asignación pura de operarios a máquinas. Otro ejemplo, se refiere a la asignación de competidores para desempeñarse en la competencia de algún evento deportivo, desde luego, con diferente eficiencia individual; aquí también se asigna un competidor para ocupar cada relevo de la carrera o cada posición en un juego colectivo.

Modelo de asignación.

Minimo Z = Σ Cij Xij; en donde:

$$X_{ij} = \begin{cases} 1, & \textbf{si se asigna i a la acción j} \\ 0, & \textbf{si no se asigna i a la acción j} \end{cases}$$

C i j = costo o valor del desempeño individual de i en la acción j.

Sujeta a las restricciones:

ΣX i j = 1; desde i = 1 hasta i = n; de j = 1 hasta j= n.

i \ j	1	2	...	n
1	C_{11}	C_{12}	...	C_{1n}
2	C_{21}	C_{22}	...	C_{2n}
...	...	...	...	...
n	C_{n1}	C_{n2}	...	C_{nn}

Figura 4-59. Matriz de asignación pura.

MÉTODO HÚNGARO para la asignación.

La más conocida técnica de solución para el problema de asignación pura es el método húngaro, desarrollado a partir del teorema que demostró el matemático húngaro König en 1916. Este método utiliza la propiedad de reducción de matrices para reducir la matriz original de costo, **hasta que los costos C i j asociados con la asignación óptima, sean cero** y todos los otros costos sean no negativos.

En cada iteración del método húngaro, se reduce la matriz de tal manera que **haya al menos un cero en cada renglón y columna**, comprobando con el teorema de König si se ha alcanzado la solución óptima. Si el número mínimo de renglones y/o columnas necesarios para cubrir todos los ceros es n, entonces existe una asignación óptima (no necesariamente única).

Ejemplo 4-8. Método Húngaro en la asignación (ASIGNA1).

La siguiente matriz contiene los costos para operar n=4 máquinas, por n=4 personas así calificadas en su empresa. Optimice la asignación idónea.

i / j	1	2	3	4
1	1	4	6	3
2	9	7	10	9
3	4	5	11	7
4	8	7	8	5

Figura 4-60. Matriz de costos en ejemplo ASIGNA1.

Paso 1 . Seleccione en cada renglón i de la matriz, el menor costo C i j, (menor C i j = U i), luego réstelo en cada elemento del renglón.

i / j	1	2	3	4	U_i
1	1	4	6	3	$U_1 = 1$
2	9	7	10	9	$U_2 = 7$
3	4	5	11	7	$U_3 = 4$
4	8	7	8	5	$U_4 = 5$

Figura 4-61. Paso 1 Método Húngaro, ejemplo ASIGNA1.

Paso 2. Seleccione en cada columna j de la matriz resultante en el paso 1, el costo menor C i j, (menor Cij=Vj) y réstelo en cada elemento de la misma columna.

i / j	1	2	3	4
1	0	3	5	2
2	2	0	3	2
3	0	1	7	3
4	3	2	3	0
V_j	$V_1 = 0$	$V_2 = 0$	$V_3 = 3$	$V_4 = 0$

Figura 4-62. Paso 2 Método Húngaro, ejemplo ASIGNA1.

Paso 3.**Sombree los renglones y/o columnas de la matriz**, de tal modo que sean los mínimos necesarias para cubrir todos los ceros.

i / j	1	2	3	4
1	0	3	2	2
2	2	0	0	2
3	0	1	4	3
4	3	2	0	0

Figura 4-63. Paso 3 Mínimo sombreado de renglones y/o columnas cubriendo todos los ceros en ejemplo ASIGNA1.

Paso 4. Seleccione entre los costos no sombreados, el número menor C i j, (= U i j) o bien, el menor C i j,(= V i j), y **réstelo a todos los costos no sombreados**; después, sume el mismo a los costos ubicados en la intersección de los renglones y columnas sombreados. Este paso **se repite hasta lograr la solución óptima**.

i / j	1	2	3	4	U_{ij}
1	0	3	2	2	
2	2	0	0	2	
3	0	1	4	3	$U_{32} = 1$
4	3	2	0	0	

Figura 4-64. Paso 4 Método Húngaro, ±(mínimo Cij no sombreado) en ejemplo ASIGNA1.

Se tiene la solución óptima cuando el mínimo necesario de renglones y columnas sombreadas para cubrir los ceros es n. En este problema el mínimo es n =4.

i / j	1	2	3	4
1	0	2	1	1
2	3	0	0	2
3	0	0	3	2
4	4	2	0	0

Figura 4-65. Paso 4 Método Húngaro, renglones y/o columnas sombreados necesarios para cubrir los ceros n = 4, ejemplo ASIGNA1.

Entonces la asignación óptima es la que muestra la tabla siguiente:

i / j	1	2	3	4
1	**0**	2	1	1
2	3	0	**0**	2
3	0	**0**	3	2
4	4	2	0	**0**

Figura 4-66. Asignación óptima en ejemplo ASIGNA1.

Solución óptima: $X_{11} = 1$, $X_{23} = 1$, $X_{32} = 1$, $X_{44} = 1$

$Z = C_{11} X_{11} + C_{23} X_{23} + C_{32} X_{32} + C_{44} X_{44} = 1(1) + 10(1) + 5(1) + 5(1) = 21$

En la solución óptima, la suma de las costos Ui restados de renglones i en paso 1, más las costos V j restados de columnas j en paso 2, más el costo U i j ó V i j, restado y / o sumado, en paso 4, proporciona el correspondiente valor óptimo. Así el costo es:

Z óptimo = ΣU i + ΣV j + ΣU i j + ΣV i j, para toda i, para toda j.

$\Sigma U_i = U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + U_{32} = 1 + 7 + 4 + 5 + 1 = 18$

$\Sigma V_j = V_1 + V_2 + V_3 + V_4 = 0 + 0 + 3 + 0 = 3$

$\Sigma U_i + \Sigma V_j = 18 + 3 = 21$

Ejemplo 4-9. Método Húngaro en la asignación (ASIGNA2).

La siguiente matriz muestra costos C i j de n = 5 candidatos i (i = 1,2,...,5) así calificados, en el desempeño de n = 5 actividades j (j = 1,2,..,5). Con el método húngaro calcule la asignación óptima.

i / j	1	2	3	4	5
1	3	8	12	10	3
2	8	7	2	9	7
3	6	4	2	7	5
4	8	4	2	3	5
5	9	10	6	9	10

Figura 4-67. Matriz de costos en ejemplo ASIGNA2.

Paso 1. Reste el menor (U i) de los costos C i j en cada renglón:

i / j	1	2	3	4	5	U_i
1	3	8	12	10	3	$U_1 = 3$
2	8	7	2	9	7	$U_2 = 2$
3	6	4	2	7	5	$U_3 = 2$
4	8	4	2	3	5	$U_4 = 2$
5	9	10	6	9	10	$U_5 = 6$

Figura 4-68. Paso 1 Método Húngaro en ejemplo ASIGNA2.

Paso 2.- Reste el menor (V j) de los costos C i j en cada columna:

i / j	1	2	3	4	5
1	0	5	9	7	0
2	6	5	0	7	5
3	4	2	0	5	3
4	6	2	0	1	3
5	3	4	0	3	4
V_j	$V_1 = 0$	$V_2 = 2$	$V_3 = 0$	$V_4 = 1$	$V_5 = 0$

Figura 4-69. Paso 2 Método Húngaro en ejemplo ASIGNA2.

Paso 3.-Sombree los renglones y columnas de la matriz, de tal modo que sean los mínimos necesarios para cubrir todos los ceros. La asignación es óptima con n = 5 renglones y/o columnas. De lo contrario se continúa el método con el paso 4.

Paso 4.- Selecciones entre los costos no sombreados, el número menor C ij, (= U_{ij}) o bien, el menor C_{ij}, (= V_{ij}), y **réstelo a todos los costos sin sombrear**; después, sume el mismo a los costos ubicados en la interseccion de los renglones y columnas sombreados. Repita este paso hasta conseguir n = 5 (renglones y/o columnas sombreados), la solución óptima.

i / j	1	2	3	4	5
1	0	3	9	6	0
2	6	3	0	6	5
3	4	0	0	4	3
4	6	0	0	0	3
5	3	2	0	2	4
V_j		$V_{52} = 2$			

Figura 4-70. Paso 4 Método Húngaro en ejemplo ASIGNA2.

En la asignación de la tabla anterior solo se sombrean 3 renglones y una columna con ceros, pero se necesitan 5, entonces se repite el paso 4 hasta conseguirlo.

i / j	1	2	3	4	5
1	0	3	11	6	0
2	4	1	0	4	3
3	4	0	2	4	3
4	6	0	2	0	3
5	1	0	0	0	2
V_j	$V_{51} = 1$				

Figura 4-71. Paso 4 Método Húngaro. Renglones y columnas sombreados n = 4, ejemplo ASIGNA2.

i / j	1	2	3	4	5
1	0	4	12	7	0
2	3	1	0	4	2
3	3	0	2	4	2
4	5	0	2	0	2
5	0	0	0	0	1

Figura 4-72. Paso 4 Método Húngaro. Se logra sombrear n = 5 renglones y columnas, ejemplo ASIGNA2.

La última asignación resulta con los 5 renglones y columnas sombreadas cubriendo los ceros de la tabla.

Aquí se detiene el proceso y se interpreta la **asignación óptima localizando, al menos un cero en cada renglón y en cada columna**. Estos ceros indican el costo idóneo asignado a la persona i en el desempeño de la actividad j, como se muestra en la siguiente matriz.

i / j	1	2	3	4	5
1	0	4	12	7	**0**
2	3	1	**0**	4	2
3	3	**0**	2	4	2
4	5	0	2	**0**	2
5	**0**	0	0	0	1

Figura 4-73. Asignación óptima en ejemplo ASIGNA2.

Asignación óptima: $X_{15} = 1$, $X_{23} = 1$, $X_{32} = 1$, $X_{44} = 1$, $X_{51} = 1$

Z óptima = $C_{15}X_{15} + C_{23}X_{23} + C_{32}X_{32} + C_{44}X_{44} + C_{51}X_{51}$

Z óptima = 3(1) + 2(1) + 4(1) + 3(1) + 9(1) = 21

Z óptimo = ΣU i + ΣV j + ΣU i j +Σ V i j = 3+2+2+2+6+0+2+0+1+0+2+1 = 21

Ejemplo 4-10. Método Húngaro en la asignación (ASIGNA3).

La siguiente matriz muestra costos C i j de n = 4 candidatos i (i = 1, 2, ..., 4) así calificados, en el desempeño de n=4 actividades j (j = 1, 2, .., 4). Con el método húngaro calcule la asignación óptima.

i / j	1	2	3	4
1	8	5	7	6
2	9	1	8	3
3	7	3	2	1
4	1	6	9	4

i / j	1	2	3	4	U_i
1	8	5	7	6	$U_1 = 5$
2	9	1	8	3	$U_2 = 1$
3	7	3	2	1	$U_3 = 1$
4	1	6	9	4	$U_4 = 1$

i / j	1	2	3	4
1	3	0	2	1
2	8	0	7	2
3	6	2	1	0
4	0	5	8	3
V_j	$V_1 = 0$	$V_2 = 0$	$V_3 = 1$	$V_4 = 0$

i / j	1	2	3	4	U_{ij}
1	3	0	1	1	$U_{13} = 1$
2	8	0	6	2	
3	6	2	0	0	
4	0	5	7	3	

i / j	1	2	3	4
1	2	0	0	0
2	7	0	5	1
3	6	3	0	0
4	0	6	7	3

i / j	1	2	3	4
1	2	0	0	**0**
2	7	**0**	5	1
3	6	3	**0**	0
4	**0**	6	7	3

Figura 4-74. Tablas del ejemplo ASIGNA3.

Asignación óptima: $X_{14} = 1$, $X_{22} = 1$, $X_{33} = 1$, $X_{41} = 1$

Z óptima = $C_{14} X_{14} + C_{22} X_{22} + C_{33} X_{33} + C_{41} X_{41}$

Z óptima = 6(1)+1(1)+2(1)+1(1) = 10; otra asignación óptima del problema es:

i / j	1	2	3	4
1	2	0	**0**	0
2	7	**0**	5	1
3	6	3	0	**0**
4	**0**	6	7	3

Figura 4-75. Asignación óptima en ejemplo ASIGNA3.

Asignación óptima: $X_{13} = 1$, $X_{22} = 1$, $X_{34} = 1$, $X_{41} = 1$

Z óptima = $C_{14} X_{14} + C_{22} X_{22} + C_{33} X_{33} + C_{41} X_{41} = 7(1) +1(1) +1(1) +1(1) = 10$

En ambas cumple: **Z óptimo=ΣUi + ΣVj + ΣUij +ΣVij = 5+1+1+1+0+0+1+0+1 = 10**