FORMULACION DE PROBLEMAS LINEALES.

La programación lineal son modelos destinados a la asignación eficiente de los recursos limitados en actividades conocidas con el objetivo de satisfacer las metas deseadas (maximizar beneficios o minimizar costos).

La característica distintiva de los modelos es que las funciones que representan el objetivo y las restricciones son lineales. (No se permite multiplicación de variables ni variables elevadas a potencias). Algunas de las siguientes restricciones no se pueden emplear en un modelo de programación lineal.

$$X_1X_2 + X_3 \geq 5 \quad \text{No}$$
$$X_1^2 + X_2^2 = 20 \quad \text{No}$$
$$X_1 + 3X_2 \leq 20 \quad \text{Sí}$$

Un modelo de programación lineal se define usualmente como sigue:

Maximizar o minimizar $Z = C_1X_1 + C_2X_2 + C_3X_3 + \ldots + C_nX_n$

Sujeto a:

$$A_{11}X_1 + A_{12}X_2 + A_{13}X_3 + \ldots + A_{1n}X_n (\leq, =, \geq) b_1$$
$$A_{21}X_1 + A_{22}X_2 + A_{23}X_3 + \ldots + A_{2n}X_n (\leq, =, \geq) b_2$$
$$A_{31}X_1 + A_{32}X_2 + A_{33}X_3 + \ldots + A_{3n}X_n (\leq, =, \geq) b_3$$
.
.
.
$$A_{m1}X_1 + A_{m2}X_2 + A_{m3}X_3 + \ldots + A_{mn}X_n (\leq, =, \geq) b_m$$

$$X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n \geq 0$$

$$A_{ij}, b_i, C_j \text{(parámetros conocidos)}$$
$$(i = 1,2,3,\ldots,m, \ j = 1,2,3,\ldots,n)$$
$$n = \text{Número de incógnitas}$$
$$m = \text{Número de restricciones}$$

EJEMPLO 1.

Un fabricante de muebles tiene 6 unidades de maderas y 28 horas disponibles, durante las cuales fabricará biombos decorativos. Con anterioridad, se han vendido bien 2 modelos, de manera que se limitará a producir estos 2 tipos. Estima que el modelo uno requiere 2 unidades de madera y 7 horas de tiempo disponible, mientras que el modelo 2 requiere una unidad de madera y 8 horas. Los precios de los modelos son 120 dls. y 80 dls., respectivamente. ¿Cuántos biombos de cada modelo debe fabricar si desea maximizar su ingreso en la venta?

OBJETIVO : Maximizar el ingreso por ventas

RESTRICCIONES : Unidades de madera

Tiempo disponible

VARIABLE DE DECISION:

X_1 = Cantidad de biombos tipo I a fabricar

X_2 = Cantidad de biombos tipo II a fabricar

Maximizar $Z = 120X_1 + 80X_2$

Sujeto a:

$2X_1 + X_2 \leq 6$ (unidades de madera)

$7X_1 + 8X_2 \leq 28$ (tiempo disponible)

$$X_1, X_2 \geq 0$$

PROBLEMA 2.

Una firma de contadores públicos especializados en preparar liquidaciones y pago de impuestos y también auditorías en empresas pequeñas. El interés es saber cuantas auditorías y liquidaciones pueden realizar mensualmente, de tal manera que obtengan los máximos ingresos. Se dispone de 800 horas para trabajo directo y dirección y 320 horas para revisión. Una auditoría en promedio requiere de 40 horas de trabajo directo y dirección y 10 horas de revisión, además aporta un ingreso de 300 dls. Una liquidación de impuestos requiere de 8 horas de trabajo directo y dirección y 5 horas de revisión y produce un ingreso de 100 dls. Se pueden realizar tantas auditorías como se desee, pero el máximo de liquidaciones mensuales disponibles es de 60.

OBJETIVO : Maximizar los ingresos totales

VARIABLE DE DECISION:

X_1 = Cantidad de auditorías

X_2 = Cantidad de liquidaciones

RESTRICCIONES : Tiempo disponible para trabajo directo

Tiempo disponible para trabajo de revisión

Número máximo de liquidaciones

Maximizar $Z = 300X_1 + 100X_2$

Sujeto a:

$$40X_1 + 8X_2 \leq 800$$
$$10X_1 + 5X_2 \leq 320$$
$$X_2 \leq 60$$
$$X_1, X_2 \geq 0$$

PROBLEMA 3.

Una empresa manufacturera está considerando dedicar su capacidad a fabricar 3 productos; llamémoslos productos 1, 2 y 3. La capacidad disponible de las máquinas que podría limitar la producción se resume en la siguiente tabla:

Tipo de Máquina	Tiempo Disponible (horas máquin)
Fresadora	500
Torno	350
Rectificadora	150

El número de horas requeridas por cada unidad de los productos respectivos es:

Tipo de Máquina	Producto 1	Producto 2	Producto 3
Fresadora	9	3	5
Torno	5	4	0
Rectificadora	3	0	2

El departamento de ventas indica que el potencial de ventas para los productos 1 y 2 es mayor que la tasa de producción máxima y que el potencial de ventas para el producto 3 es de 20 unidades por semana. La utilidad unitaria sería de 30, 12 y 15 dls., respectivamente, para los productos 1, 2 y 3.

Formúlese el modelo de programación lineal para determinar cuanto debe producir la empresa de cada producto para maximizar la utilidad.

OBJETIVO : Maximizar la utilidad

VARIABLE DE DECISION: Cantidad a fabricar del producto 1. (X_1).

Cantidad a fabricar del producto 2. (X_2).

Cantidad a fabricar del producto 3. (X_3).

RESTRICCIONES : Capacidad disponible para producción de cada máquina (3 restricciones)

Potencial de ventas para el producto 3. (1 restricción)

Maximizar $Z = 30X_1 + 12X_2 + 15X_3$

Sujeto a:

$$9X_1 + 3X_2 + 5X_3 \leq 500$$
$$5X_1 + 4X_2 \leq 350$$
$$3X_1 + 2X_3 \leq 150$$
$$X_3 \leq 20$$

$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

PROBLEMA 4.

Un expendio de carnes acostumbra preparar carne para hamburguesa con una combinación de carne molida de res y carne molida de cerdo. La carne de res contiene 80 % de carne y 20 % de grasa y le cuesta a la tienda 80 centavos por libra. La carne de cerdo contiene 68 % de carne y 32 % de grasa y cuesta 60 centavos por libra. ¿Qué cantidad de cada tipo de carne debe emplear la tienda por cada libra de carne para hamburguesa si desea minimizar el costo y mantener el contenido de grasa no mayor de 25 %?

OBJETIVO : Minimizar el costo

VARIABLE DE DECISION: Cantidad de carne de res. (X_1).

Cantidad de carne de cerdo (X_2).

RESTRICCIONES : Contenido de grasa no mayor de 25 %

Contenido de carne molida a producir

Minimizar $Z = 80X_1 + 60X_2$

Sujeto a:

$$.20X_1 + .32X_2 \leq .25$$
$$X_1 + X_2 = 1$$

$X_1, X_2 \geq 0$

PROBLEMA 5.

Formule una dieta para pollos. Suponga que el lote diaria requerido de la mezcla son 100 lbs. La dieta debe contener:

1.- Al menos 0.8 % pero no más de 1.2 % de calcio

2.- Al menos 22 % de proteínas

3.- a lo más 5 % de fibras crudas

Suponga, además, que los principales ingredientes utilizados incluyen maíz, soya y caliza. El contenido nutritivo de estos ingredientes se resume a continuación.

LIBRAS POR LIBRA DE INGREDIENTE

Ingrediente	Calcio	Proteína	Fibra	Costo($) por libra
Caliza	.380	.00	.00	.0164
Maíz	.001	.09	.02	.0463
Soya	.002	.50	.08	.1250

Minimice el costo total para la dieta, determinando la cantidad de cada ingrediente que debe utilizarse.

OBJETIVO : Minimizar el costo total de la dieta (100 lbs.)

VARIABLE DE DECISION: Contenido de caliza. (X_1).

Contenido de maíz (X_2).

Contenido de soya (X_3).

RESTRICCIONES : Contenidos nutritivos (4 restricciones).

Contenido de la mezcla de 100 lbs. (1 restricción)

Minimizar $Z = 0.0164X_1 + 0.0463X_2 + 0.1250X_3$

Sujeto a:

$$0.380X_1 + 0.001X_2 + 0.002X_3 \geq 0.8 \text{ lbs}$$
$$0.380X_1 + 0.001X_2 + 0.002X_3 \leq 1.2 \text{ lbs}$$
$$0.00X_1 + 0.09X_2 + 0.50X_3 \geq 22 \text{ lbs}$$
$$0.00X_1 + 0.02X_2 + 0.08X_3 \leq 5 \text{ lbs}$$
$$X_1 + X_2 + X_3 = 100 \text{ lbs}$$

$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

PROBLEMA 6.

Una compañía distribuidora de agua tiene 3 depósitos con entrada diaria estimada de 15, 20 y 25 millones de litros de agua respectivamente. Diariamente tiene que abastecer 4 áreas A, B, C y D, las cuales tienen una demanda esperada de 8, 10, 12 y 15 millones de litros de agua, respectivamente. El costo de bombeo por millón de litros de agua es como sigue:

DEPÓSITO	ÁREA			
	A	B	C	D
1	2	3	4	5
2	3	2	5	2
3	4	1	2	3

Minimice el costo total de suministro de agua de los depósitos a las áreas.

OBJETIVO : Minimizar el costo total de suministro de agua de los depósitos a las áreas.

VARIABLES DE DECISION: Cantidad de agua que se envía de cada depósito a cada área.

RESTRICCIONES : Entradas de agua disponible. (3 restricciones)

Necesidades de agua de las áreas. (4 restricciones)

Minimizar

$$Z = 2X_{1A} + 3X_{1B} + 4X_{1C} + 5X_{1D} + 3X_{2A} + 2X_{2B} + 5X_{2C} + 2X_{2D} + 4X_{3A} + X_{3B} + 2X_{3C} + 3X_{3D}$$

$$X_{1A} + X_{1B} + X_{1C} + X_{1D} \leq 15$$
$$X_{2A} + X_{2B} + X_{2C} + X_{2D} \leq 20$$
$$X_{3A} + X_{3B} + X_{3C} + X_{3D} \leq 25$$

$$X_{1A} + X_{2A} + X_{3A} = 8$$
$$X_{1B} + X_{2B} + X_{3B} = 10$$
$$X_{1C} + X_{2C} + X_{3C} = 12$$

Sujeto a: $X_{1D} + X_{2D} + X_{3D} = 15$

$$X_{1A}, X_{1B}, X_{1C}, X_{1D}, X_{2A}, X_{2B}, X_{2C}, X_{2D}, X_{3A}, X_{3B}, X_{3C}, X_{3D} \geq 0$$

PROBLEMA 7.

Una compañía de minas opera 3 minas. El mineral de cada una de ellas se separa antes embarcarse en 2 grados (tipos). La cantidad diaria de producción de las minas así como sus costos diarios de operación son los siguientes:

	Mineral Grado Alto (ton/día)	Mineral Grado Bajo (ton/día)	Costo ($!,000/día)

Mina I	4	4	20
Mina II	6	4	22
Mina III	1	6	18

La compañía se comprometió a entregar 54 toneladas de mineral de grado alto y 65 toneladas de mineral de grado bajo para fines de la semana siguiente (7 días disponibles de operación). Además, desea determinar el número de días que la mina debería operar durante la siguiente semana si debe cumplir su compromiso a un costo mínimo.

OBJETIVO : Minimizar el costo de extracción mineral.

VARIABLE DE DECISION: Días de operación en cada mina.

X_1=Número de días de operación de la mina I

X_2=Número de días de operación de la mina II

X_3=Número de días de operación de la mina III

RESTRICCIONES : Tiempo disponible (7 días) (3 restricciones)

Cantidad de mineral alto grado (1 restricción)

Cantidad de mineral bajo grado (1 restricción)

Minimizar $Z = 20X_1 + 22X_2 + 18X_3$

Sujeto a:

$$X_1 \leq 7$$
$$X_2 \leq 7$$
$$X_3 \leq 7$$
$$4X_1 + 6X_2 + X_3 \geq 54$$
$$4X_1 + 4X_2 + 6X_3 \geq 65$$

$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

EJEMPLO 8.

Jack Bienstaulk tiene a su cargo la compra de mercancías enlatadas para el servicio de alimentos GAGA en una gran universidad. Él sabe cuál será la demanda durante el transcurso del año escolar y ha estimado también los precios de compra. En la figura se muestran estos datos. Puede comprar anticipadamente y almacenar para evitar los aumentos de precios, pero existe un costo de mantener inventario de $0.20 por caja, por mes, aplicado al inventario en existencia al final del mes. Elabore un PL que minimice el costo y que ayude a Jack a determinar el momento de sus compras, Sugerencia: Supóngase que Pt es el número de cajas compradas en el mes t y que It es el número de cajas en existencias al final del mes t.

Datos de la demanda y el costo

	SEP.	OCT.	NOV.	DIC.	ENE.	FEB.	MAR.	ABR.	MAY.
Demandas (cajas)	1000	900	850	500	600	1000	1000	1000	500
costo por caja	$20	$20	$20	$21	$21	$21	$23	$23	$23

OBJETIVO: Minimizar el costo total (costo de compra e inventarios)

VARIABLES: P_t =Cantidad de cajas compradas en el mes t. (t=1,2,… 9)

I_t = Cantidad de cajas en existemcia en el mes t (t=1,2,…8)

RESTRICCIONES: Ecuaciones de demanda e inventarios por mes (9 restricciones)

$$\min Z = 20P_1 + 20P_2 + 20P_3 + 21P_4 + 21P_5 + 21P_6 + 23P_7 + 23P_8 + 23P_9$$
$$+ .20I_1 + .20I_2 + .20I_3 + .20I_4 + .20I_5 + .20I_6 + .20I_7 + .20I_8$$
$$\text{sujeto a}: P_1 = 1000 + I_1$$
$$I_1 + P_2 = 900 + I_2$$
$$I_2 + P_3 = 850 + I_3$$
$$I_3 + P_4 = 500 + I_4$$
$$I_4 + P_5 = 600 + I_5$$
$$I_5 + P_6 = 1000 + I_6$$
$$I_6 + P_7 = 1000 + I_7$$
$$I_7 + P_8 = 1000 + I_8$$
$$I_8 + P_9 = 500$$
$$P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7, P_8, P_9, I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, I_6, I_7, I_8 \geq 0$$

EJEMPLO 9.

Para una cafetería que trabaja 24 horas se requieren las siguientes meseras:

HORAS DEL DÍA	NÚMERO MÍNIMO DE MESERAS
2-6	4
6-10	8
10-14	10
14-18	7
18-22	12
22-2	4

Cada mesera trabaja 8 horas consecutivas por día con horarios de entrada 2, 6, 10, 14, 18 y 22 horas. El objetivo es encontrar el número más pequeño requerido para cumplir los requisitos anteriores. Formule el problema como un modelo de programación lineal.

OBJETIVO: Minimizar el número total de meseras requeridas.

VARIABLES DE DECISIÓN: X_1= Número de meseras que entran a las 2

X_2= Número de meseras que entran a las 6

X_3= Número de meseras que entran a las 10

X_4= Número de meseras que entran a las 14

X_5= Número de meseras que entran a las 18

X_6= Número de meseras que entran a las 22

RESTRICCIONES: Cantidad de meseras requeridas en el horario de 2-6 (4 meseras)

Cantidad de meseras requeridas en el horario de 6-10 (8 meseras)

Cantidad de meseras requeridas en el horario de 10-14 (10 meseras)

Cantidad de meseras requeridas en el horario de 14-18 (7 meseras)

Cantidad de meseras requeridas en el horario de 18-22 (12 meseras)

$$\text{Minimizar} \quad Z = X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6$$

$$\begin{aligned} \text{sujeto a}: X_1 + X_6 &\geq 4 \\ X_1 + X_2 &\geq 8 \\ X_2 + X_3 &\geq 10 \\ X_3 + X_4 &\geq 7 \\ X_4 + X_5 &\geq 12 \\ X_5 + X_6 &\geq 4 \\ X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6 &\geq 0 \end{aligned}$$

Cantidad de meseras requeridas en el horario de 22-2 (4 meseras)

10. Una cadena de restaurantes de servicio rápido desea construir cuatro tiendas. Anteriormente, la cadena ha empleado sies diferentes compañías y, estando satisfecha con todas ellas, las ha invitado a concursar para cada trabajo. Las ofertas finales en miles de dólares son las que se muestran.

tienda	constructoras					
	1	2	3	4	5	6
1	85.3	88	87.5	82.4	89.1	86.1
2	78.9	77.4	77.4	76.5	79.3	78.3
3	82	81.3	82.4	80.6	83.5	81.7
4	84.3	84.6	86.2	83.3	84.4	85.5

Ya que la cadena desea tener listos los nuevos establecimientos tan pronto como sea posible otorgará cuando más un trabajo a cada compañía constructora, ¿que asignación da como resultado un costo total mínimo para la cadena de restaurantes?

OBJETIVO: Minimizar el costo de construcción de las tiendas

VARIABLES: X_{11} = Asignar la tienda 1 a la constructora 1

X_{12} = Asignar la tienda 1 a la constructora 2

X = Asignar la tienda 1 a la constructora 3

13

....

X_{46} = Asignar la tienda 4 a la constructora 6

RESTRICCIONES: Asignar la tienda 1

Asignar la tienda 2

Asignar la tienda 3

Asignar la tienda 4

Máximo una tienda para constructora 1

Máximo una tienda para constructora 2

Máximo una tienda para constructora 3

Máximo una tienda para constructora 4

Máximo una tienda para constructora 5

Máximo una tienda para constructora 6

$$\text{Minimizar} \quad Z = 85.3X_{11} + 88X_{12} + 87.5X_{13} + \ldots.. + 85.5X_{46}$$

$$\begin{aligned}
\text{Sujeto a}: X_{11} + X_{12} + X_{13} + X_{14} + X_{15} + X_{16} &= 1 \\
X_{21} + X_{22} + X_{23} + X_{24} + X_{25} + X_{26} &= 1 \\
X_{31} + X_{32} + X_{33} + X_{34} + X_{35} + X_{36} &= 1 \\
X_{41} + X_{42} + X_{43} + X_{44} + X_{45} + X_{46} &= 1 \\
X_{11} + X_{21} + X_{31} + X_{41} &\leq 1 \\
X_{12} + X_{22} + X_{32} + X_{42} &\leq 1 \\
X_{13} + X_{23} + X_{33} + X_{43} &\leq 1 \\
X_{14} + X_{24} + X_{34} + X_{44} &\leq 1 \\
X_{15} + X_{25} + X_{35} + X_{45} &\leq 1 \\
X_{16} + X_{26} + X_{36} + X_{46} &\leq 1 \\
X_{11}, X_{12}, X_{13} \ldots.. X_{46} &\geq 0
\end{aligned}$$